Calcul intégral

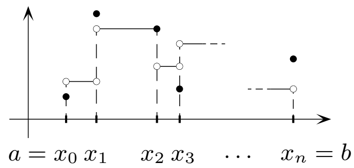
Dans tout ce chapitre, a et b sont deux réels, $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $I, J \dots$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Quand on notera $[a,b]$, il sera sous-entendu que $a \leqslant b$.

1 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

1.1 Fonction en escalier sur un segment

Définition (Fonction en escalier, subdivision adaptée)

- On dit qu'une application $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est *en escalier* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ tels que :
  1) $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$;
  2) f est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.



Un tel ensemble $\{x_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est appelé une *subdivision de* $[a,b]$ *adaptée à* f.

- L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$, qui sera noté $\mathcal{E}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$, est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de l'ensemble des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque Pour comprendre les trois points suivants, faites vous-mêmes quelques petits dessins. Soient $f, g \in \mathcal{E}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$.

- Toute subdivision de $[a,b]$ contenant une subdivision adpatée à f est elle-même une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.
- Si $\{x_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et si $\{x'_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n'}$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à g, alors $\{x_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n} \cup \{x'_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n'}$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à $\lambda f + \mu g$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ainsi qu'au produit fg.
- Si $\{x_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, la valeur constante de f sur $]x_i, x_{i+1}[$ est **par exemple** $f\left(\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. Nous nous servirons de ce petit résultat sans le rappeler chaque fois dans la suite.

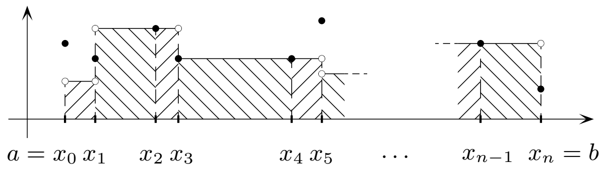
Dans la suite de ce cours, quand nous introduirons une subdivision de $[a,b]$ sous la forme $\{x_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$, il sera sous-entendu que $n \in \mathbb{N}$ et que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

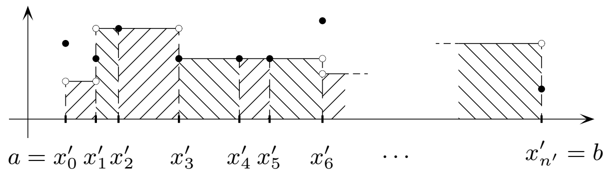
1.2 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

Définition (Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment) Soient $f \in \mathcal{E}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$ et $\{x_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et $\{x'_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n'}$ deux subdivisions de $[a,b]$ adaptées à f. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ (resp. $i \in [\![0, n']\!]$), soit y_i (resp. y'_i) la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$ (resp. $]x'_i, x'_{i+1}[$).

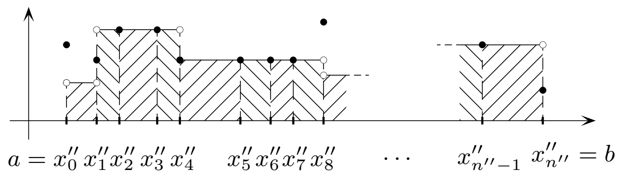
Alors : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n'-1} y'_i(x'_{i+1} - x'_i)$. Par définition, ce réel indépendant de la subdivision de $[a,b]$ adaptée à f est appelé l'*intégrale de* f *sur* $[a,b]$ et noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$.

✌ ✌ ✌ **Explication** Les figures suivantes vous aideront à comprendre la preuve nécessaire à cette définition. Elles mettent en évidence l'interprétation qu'on peut donner de l'intégrale en termes d'aire. Ces figures laissent penser que f est forcément positive ; il n'en est rien, et les parties négatives de f apportent une contribution en aire négative à $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.





On peut calculer l'aire hachurée avec n'importe quelle subdivision...



... le résultat est toujours le même.

Démonstration

- Notons $\{x''_i\}_{0\leqslant i\leqslant n''}$ la subdivision $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n} \cup \{x'_i\}_{0\leqslant i\leqslant n'}$ de $[a,b]$ et y''_i la valeur de f sur $]x''_i, x''_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0, n''-1]\!]$. Il existe alors une application φ strictement croissante de $[\![0,n]\!]$ dans $[\![0,n'']\!]$ telle que $x_i = x''_{\varphi(i)}$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$; en effet, x_i est égal à x''_j pour un certain j qui dépend de i, disons $j = \varphi(i)$.

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x''_{\varphi(i+1)}-x''_{\varphi(i)}) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \sum_{j=0}^{\varphi(i+1)-\varphi(i)-1} (x''_{\varphi(i)+j+1}-x''_{\varphi(i)+j}) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\varphi(i+1)-\varphi(i)-1} y_i(x''_{\varphi(i)+j+1}-x''_{\varphi(i)+j}).$$

- Afin de poursuivre ce calcul, montrons que $y_i = y''_{\varphi(i)+j}$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ et $j \in [\![0, \varphi(i+1)-\varphi(i)-1]\!]$. Or les inégalités $x_i = x''_{\varphi(i)} \leqslant x''_{\varphi(i)+j} < x''_{\varphi(i)+j+1} \leqslant x''_{\varphi(i+1)} = x_{i+1}$ montrent que $]x''_{\varphi(i)+j}, x''_{\varphi(i)+j+1}[\subseteq]x_i, x_{i+1}[$. Du coup, par définition de y_i et $y''_{\varphi(i)+j}$, $y_i = y''_{\varphi(i)+j}$ comme voulu.

- Reprenons : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\varphi(i+1)-\varphi(i)-1} y''_{\varphi(i)+j}(x''_{\varphi(i)+j+1}-x''_{\varphi(i)+j}) = \sum_{k=0}^{n''-1} y''_k(x''_{k+1}-x''_k).$

- Le même raisonnement prouve que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n'-1} y'_i(x'_{i+1}-x'_i) = \sum_{k=0}^{n''-1} y''_k(x''_{k+1}-x''_k).$ D'où le résultat. ■

Remarque On peut changer la valeur de $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ en un nombre fini de points sans changer la valeur de $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

En effet De par sa définition, $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1}-x_i)$ ne dépend pas de la valeur que f prend en $x_0, x_1, \dots, x_n$. Si on modifie f en un nombre fini de points, et si on ajoute ces points à la liste des x_i, $i \in [\![0,n]\!]$, on s'aperçoit donc que la valeur de $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1}-x_i)$ ne s'en trouve pas modifiée.

Exemple $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\int_{[a,b]} \lambda = \lambda(b-a).$

1.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

Théorème (Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment) Soient $f, g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$.

(i) **Linéarité :** $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$

Bref, l'application $\varphi \longmapsto \displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$.

(ii) **Positivité :** Si $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$. **Croissance :** Si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

(iii) **Relation de Chasles :** Si $c \in [a,b]$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$

Démonstration Donnons-nous $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f **et** à g — réunir une subdivision adaptée à f et une subdivision adaptée à g.

(i) **Linéarité :** Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Alors $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ est aussi une subdivision de $[a,b]$ adaptée à $\lambda f+\mu g$ et :

$$\int_{[a,b]}(\lambda f+\mu g)=\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda f+\mu g)\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i)$$
$$=\lambda\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i)\ +\ \mu\sum_{i=0}^{n-1}g\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i)=\lambda\int_{[a,b]}f+\mu\int_{[a,b]}g.$$

(ii) **Positivité :** Supposons $f\geqslant 0$. Alors : $\displaystyle\int_{[a,b]}f=\sum_{i=1}^{n-1}f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i)\geqslant\sum_{i=1}^{n-1}0\times(x_{i+1}-x_i)=0.$

Croissance : Supposons $f\leqslant g$. Alors par linéarité et positivité : $\displaystyle\int_{[a,b]}g-\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}\overbrace{(g-f)}^{\geqslant 0}\geqslant 0.$

(iii) **Relation de Chasles :** Soit $c\in[a,b]$. Alors f est en escalier sur $[a,c]$ (resp. $[c,b]$). Soit donc $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ (resp. $\{x'_i\}_{0\leqslant i\leqslant n'}$) une subdivision de $[a,c]$ (resp. $[c,b]$) adaptée à f. Alors $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}\cup\{x'_i\}_{0\leqslant i\leqslant n'}$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, telle que $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=c=x'_0<x'_1<\ldots<x'_{n'}=b$.

$$\int_{[a,b]}f=\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i)\ +\ \sum_{i=0}^{n'-1}f\left(\frac{x'_i+x'_{i+1}}{2}\right)(x'_{i+1}-x'_i)=\int_{[a,c]}f+\int_{[c,b]}f.\qquad\blacksquare$$

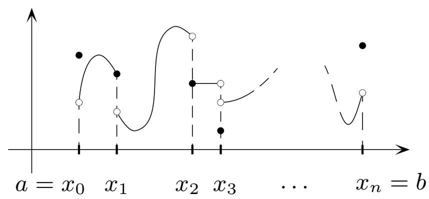
2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

2.1 Fonction continue par morceaux sur un segment

Définition (Fonction continue par morceaux, subdivision adaptée)

• On dit qu'une application $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est *continue par morceaux* s'il existe $n\in\mathbb{N}$ et des réels $x_0,x_1,\ldots,x_n$ tels que :
1) $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$;
2) f est continue sur $]x_i,x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité en x_i et en x_{i+1} pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$.

Un tel ensemble $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ est appelé une *subdivision de* $[a,b]$ *adaptée à* f.



• L'ensemble des applications (réelles) continues par morceaux sur $[a,b]$, noté $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de l'ensemble des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

✖✖✖ **Attention !** Une fonction comme $x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ même si elle est continue sur $\mathbb{R}_-^\times$ et $\mathbb{R}_+^\times$, car elle n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Remarque Soient $f,g\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$.
- Toute subdivision de $[a,b]$ contenant une subdivision adpatée à f est elle-même une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.
- Si $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et si $\{x'_i\}_{0\leqslant i\leqslant n'}$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à g, alors $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}\cup\{x'_i\}_{0\leqslant i\leqslant n'}$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à $\lambda f+\mu g$ pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, ainsi qu'au produit fg.

Exemple Les fonctions en escalier et les fonctions continues sont continues par morceaux ; bref :

$$\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})\subseteq\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})\quad\text{et}\quad\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})\subseteq\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}).$$

2.2 Approximation d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier sur un segment

Théorème (Approximation d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier)
Soit $f \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ telles que $\quad \varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad$ et $\quad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

Démonstration

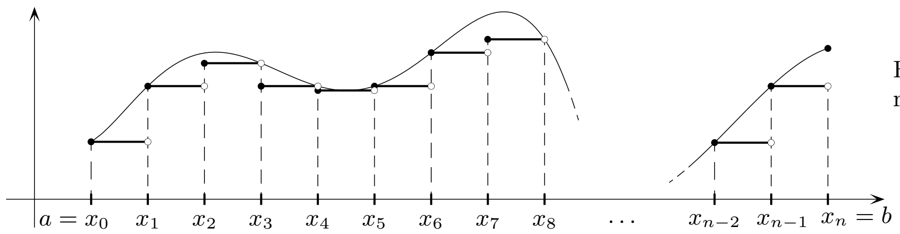
- Dans un premier temps, faisons l'hypothèse que f est **<u>continue</u>** sur $[a,b]$ et fixons $\varepsilon > 0$. Via le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$. Par conséquent, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a,b]$:

  $$|x-y| \leqslant \alpha \quad \Longrightarrow \quad \big|f(x)-f(y)\big| \leqslant \varepsilon.$$

  Fixons $n \in \mathbb{N}^\times$ tel que $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \alpha$, puis posons $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Ces réels sont rangés naturellement dans l'ordre suivant : $\quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.\quad$ On définit alors la fonction φ en posant :

  $$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}[, \quad \varphi(x) = \inf_{[x_k,x_{k+1}]} f,$$

  et $\varphi(x_n) = \varphi(b) = f(b)$. Cette définition est possible car sur un segment une fonction continue est minorée — mieux en fait, possède un minimum. La fonction ψ est définie comme φ, mais avec des « sup » à la place des « inf ».

  En trait épais, représentation graphique de φ

  Résultat : par construction, $\varphi, \psi \in \mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et de plus $\quad \varphi \leqslant f \leqslant \psi.\quad$ Vérifions pour conclure que $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$. Soit $x \in [a,b[$ — en b, le résultat est clair. Alors $x \in [x_k, x_{k+1}[$ pour un certain $k \in [\![0,n-1]\!]$. Parce que f est continue, le minimum $\varphi(x) = \inf\limits_{[x_k,x_{k+1}]} f$ de f est atteint en un certain $y_k \in [x_k, x_{k+1}]$ et le maximum $\psi(x) = \sup\limits_{[x_k,x_{k+1}]} f$ en un certain $z_k \in [x_k, x_{k+1}]$. L'inégalité $|z_k - y_k| \leqslant |x_{k+1} - x_k| = \dfrac{b-a}{n} \leqslant \alpha$ et la continuité uniforme de f nous donnent finalement le résultat voulu : $\quad \psi(x) - \varphi(x) = f(z_k) - f(y_k) \leqslant \varepsilon$.

- Revenons maintenant au cas général en supposant f continue par morceaux sur $[a,b]$ et donnons-nous une subdivision $\big\{x_i\big\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a,b]$ adaptée à f. Fixons $\varepsilon > 0$.
  Soit $i \in [\![0,n-1]\!]$. Comme f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1}, nous pouvons nous donner des fonctions φ_i et ψ_i en escalier sur $[x_i, x_{i+1}[$ telles que $\quad \varphi_i \leqslant f \leqslant \psi_i \quad$ et $\quad \psi_i - \varphi_i \leqslant \varepsilon$.

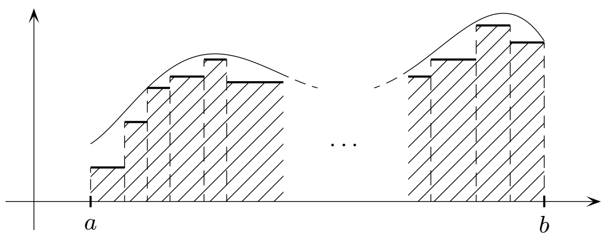
  « Collant » les φ_i, $i \in [\![0,n-1]\!]$, les unes à la suite des autres, et faisant de même avec les ψ_i, nous obtenons deux fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ telles que $\quad \varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad$ et $\quad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon \quad$ comme voulu. ■

2.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

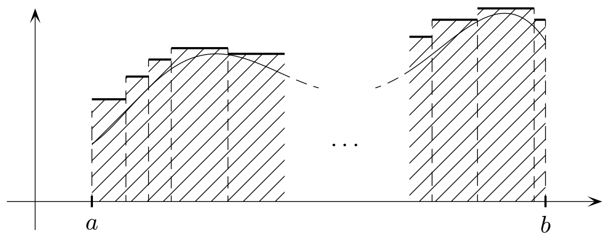
Définition (Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment) Soit $f \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

- On note $\mathcal{E}^-(f) = \Big\{\varphi \in \mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big) / \quad \varphi \leqslant f\Big\}$ et $I^-(f) = \left\{\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi\right\}_{\varphi \in \mathcal{E}^-(f)}$. Alors $\sup I^-(f)$ est un réel bien défini.
- On note $\mathcal{E}^+(f) = \Big\{\psi \in \mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big) / \quad f \leqslant \psi\Big\}$ et $I^+(f) = \left\{\displaystyle\int_{[a,b]} \psi\right\}_{\psi \in \mathcal{E}^+(f)}$. Alors $\inf I^+(f)$ est un réel bien défini.
- On a en outre : $\quad \sup I^-(f) = \inf I^+(f)$.
  On appelle *intégrale de f sur $[a,b]$* ce réel unique, que l'on note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\,\mathrm{d}t$.

✌ ✌ ✌ **Explication** Les figures ci-dessous illustrent cette définition. Pour simplifier, on a choisie f continue sur $[a, b]$. Ici encore, l'interprétation de l'intégrale en termes d'aire — algébrique, i.e. éventuellement négative — est bien visible.



Qu'on approche l'aire sous le graphe de f par le dessous avec $I^-(f)$...



... ou par le dessus avec $I^+(f)$, on obtient le même résultat : $\sup I^-(f) = \inf I^+(f)$.

Démonstration Si $a = b$, alors $I^-(f) = I^+(f) = \{0\}$, et donc $\sup I^-(f) = \inf I^+(f)$ comme voulu. Supposons désormais $a < b$.

- Soit $\{x_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. Comme f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité en x_i et en x_{i+1} pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, f est bornée sur $]x_i, x_{i+1}[$. Cela suffit à montrer que f est bornée sur tout $[a, b]$ car il n'y a qu'un nombre fini d'intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. Ainsi $\inf_{[a,b]} f$ et $\sup_{[a,b]} f$ sont des réels bien définis — propriété de la borne inférieure/supérieure.

- Montrons que $\mathcal{E}^-(f)$ est non vide. Or la fonction constante égale à $\inf_{[a,b]} f$ est en escalier sur $[a, b]$ et minore f ; elle est donc élément de $\mathcal{E}^-(f)$.

- Puisque $\mathcal{E}^-(f)$ est non vide, $I^-(f)$ l'est tout autant. Pour montrer que $\sup I^-(f)$ est un réel bien défini, la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ affirme donc que nous pouvons nous contenter de montrer que $I^-(f)$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$.
  Soit $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$. Alors $\varphi \leqslant f \leqslant \sup_{[a,b]} f$. Or nous avons déjà montré que l'intégrale est croissante sur l'ensemble des fonctions en escalier. Par conséquent : $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \sup_{[a,b]} f = \sup_{[a,b]} f \times (b - a)$, ce qui montre bien que $I^-(f)$ est majoré.

- L'existence de $\inf I^+(f)$ se démontre de manière analogue.

- Montrons que $\sup I^-(f) \leqslant \inf I^+(f)$.
  Soient $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$. Alors $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, donc par croissance de l'intégrale sur les fonctions en escalier : $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi$.
  1) A φ fixée et ψ variable, ceci signifie que $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ minore $I^+(f)$, de sorte que : $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \inf I^+(f)$.
  2) Pour φ variable, on voit donc que $\inf I^+(f)$ majore $I^-(f)$, d'où : $\sup I^-(f) \leqslant \inf I^+(f)$.

- Inversement, montrons que $\inf I^+(f) \leqslant \sup I^-(f)$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Le théorème du paragraphe précédent affirme qu'il existe deux fonctions $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$ telles que $\psi - \varphi \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, i.e. $\psi \leqslant \varphi + \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Du coup, par croissance et linéarité de l'intégrale sur les fonctions en escalier : $\displaystyle\int_{[a,b]} \psi \leqslant \int_{[a,b]} \left(\varphi + \frac{\varepsilon}{b-a}\right) = \int_{[a,b]} \varphi + \varepsilon$.
  Enfin, par définition de $\sup I^-(f)$ et $\inf I^+(f)$: $\displaystyle\inf I^+(f) \leqslant \int_{[a,b]} \psi \leqslant \int_{[a,b]} \varphi + \varepsilon \leqslant \sup I^-(f) + \varepsilon$.
  Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$: $\inf I^+(f) \leqslant \sup I^-(f)$ comme voulu. ■

Remarque On peut changer la valeur de $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ en un nombre fini de points sans changer la valeur de $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

2.4 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Théorème (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment)
Soient $f, g \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

(i) **Linéarité :** $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$

Bref, l'application $\varphi \longmapsto \displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ est une forme linéaire de $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

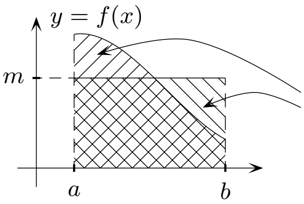
(ii) **Positivité :** Si $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$. **Croissance :** Si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

(iii) **Continuité :** $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$. **Inégalité de la moyenne :** $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$.

(iv) **Relation de Chasles :** Si $c \in [a,b]$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$

✌✌✌ **Explication**
Pourquoi parle-t-on de l'*inégalité de la moyenne* ? Pour comprendre l'origine de cette appellation, posons $g = 1$ dans cette inégalité et supposons de plus $a \neq b$. Il vient alors : $\displaystyle\left|\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f|$.

L'idée à retenir, c'est que la quantité $m = \displaystyle\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$ représente la valeur moyenne de f sur $[a,b]$, comme l'explique la figure ci-contre. L'inégalité de la moyenne affirme donc seulement que la valeur moyenne de f est plus petite que la borne supérieure de ses valeurs.



Les deux zones hachurées ont la même aire. Cela permet d'interpréter m comme la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Démonstration

(i) **Linéarité :** Pour la seule linéarité, plusieurs étapes sont nécessaires.

Première étape : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^\times$. Montrons que : $\displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f) = \lambda \int_{[a,b]} f$ en deux temps.

- Soit $\psi \in \mathcal{E}^+(\lambda f)$. Alors $\dfrac{1}{\lambda}\,\psi \in \mathcal{E}^+(f)$ car $\lambda > 0$.

Du coup : $\displaystyle\lambda \int_{[a,b]} f = \lambda \inf I^+(f) \overset{\lambda>0}{\leqslant} \lambda \int_{[a,b]} \left(\frac{1}{\lambda}\,\psi\right) = \int_{[a,b]} \psi.$

Ainsi $\displaystyle\lambda \int_{[a,b]} f$ minore $I^+(\lambda f)$, donc : $\displaystyle\lambda \int_{[a,b]} f \leqslant \inf I^+(\lambda f) = \int_{[a,b]} (\lambda f).$

- On montre l'inégalité inverse $\displaystyle\lambda \int_{[a,b]} f \geqslant \int_{[a,b]} (\lambda f)$ de la même façon en partant de $\varphi \in \mathcal{E}^-(\lambda f)$.

Deuxième étape : On procède de même dans le cas où $\lambda \in \mathbb{R}_-^\times$. Le cas $\lambda = 0$ est trivial.

Troisième étape : Montrons que : $\displaystyle\int_{[a,b]} (f+g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g.$

- Soient $\psi_f \in \mathcal{E}^+(f)$ et $\psi_g \in \mathcal{E}^+(g)$.

Alors $(\psi_f + \psi_g) \in \mathcal{E}^+(f+g)$, donc : $\displaystyle\int_{[a,b]} (f+g) \leqslant \int_{[a,b]} (\psi_f + \psi_g) = \int_{[a,b]} \psi_f + \int_{[a,b]} \psi_g.$

A ψ_f fixée et ψ_g variable, ceci signifie que $\displaystyle\int_{[a,b]} (f+g) - \int_{[a,b]} \psi_f$ minore $I^+(g)$, d'où l'inégalité :

$$\int_{[a,b]} (f+g) - \int_{[a,b]} \psi_f \leqslant \inf I^+(g) = \int_{[a,b]} g.$$

A présent, pour ψ_f variable, cette inégalité signifie que $\displaystyle\int_{[a,b]} (f+g) - \int_{[a,b]} g$ minore $I^+(f)$, d'où l'inégalité :

$\displaystyle\int_{[a,b]} (f+g) - \int_{[a,b]} g \leqslant \inf I^+(f) = \int_{[a,b]} f$, i.e. : $\displaystyle\int_{[a,b]} (f+g) \leqslant \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g.$

- On montre l'inégalité inverse $\displaystyle\int_{[a,b]} (f+g) \geqslant \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$ de la même façon en partant de $\varphi_f \in \mathcal{E}^-(f)$ et $\varphi_g \in \mathcal{E}^-(g)$.

(ii) **Positivité :** Si $f \geqslant 0$, la fonction nulle est élément de $\mathcal{E}^-(f)$, donc : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sup I^-(f) \geqslant \int_{[a,b]} 0 = 0$.

Croissance : Utiliser la positivité de l'intégrale démontrée à l'instant.

(iii) **Continuité :** Clairement, $|f| \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Or $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, donc par croissance et linéarité de l'intégrale : $\displaystyle -\int_{[a,b]} |f| = \int_{[a,b]} \big(-|f|\big) \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} |f|$, i.e. : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$.

Inégalité de la moyenne : On a $|fg| \leqslant \Big(\sup\limits_{[a,b]} |f|\Big) \times |g|$, donc par continuité, croissance, linéarité de l'intégrale : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leqslant \int_{[a,b]} |fg| \leqslant \int_{[a,b]} \Big(\sup_{[a,b]} |f|\Big)|g| = \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$.

(iv) **Relation de Chasles :** Soit $c \in [a,b]$.

- Soit $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$. Alors $\psi_{\big|[a,c]} \in \mathcal{E}^+\big(f_{\big|[a,c]}\big)$ et $\psi_{\big|[c,b]} \in \mathcal{E}^+\big(f_{\big|[c,b]}\big)$. Du coup :
$$\int_{[a,b]} \psi = \int_{[a,c]} \psi + \int_{[c,b]} \psi \geqslant \inf I^+\big(f_{\big|[a,c]}\big) + \inf I^+\big(f_{\big|[c,b]}\big) = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$
Ceci montre que $\displaystyle\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$ minore $I^+(f)$, et donc que : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \inf I^+(f) \geqslant \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.
- On obtient l'inégalité inverse de la même façon en partant de $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$. ∎

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors : $\displaystyle\int_0^{n+1} \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n k\big((k+1)-k\big) = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

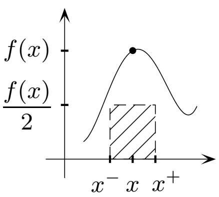
Théorème (Fonction positive et intégrale nulle) Soit $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ positive ou nulle ($a \neq b$).

(i) Si $f(x) > 0$ pour au moins un $x \in [a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f > 0$.

(ii) Si $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$, alors f est nulle sur $[a,b]$.

✖✖✖ **Attention !** Ce théorème requiert DEUX hypothèses : la **continuité** et la **positivité**. Oubliez la continuité et le résultat tombe. Par exemple, l'application δ définie sur $[0,1]$ égale à 0 sur $[0,1[$ et valant 1 en 1 est continue par morceaux sur $[0,1]$, positive ou nulle mais non nulle, et pourtant : $\displaystyle\int_{[0,1]} \delta = \int_{[0,1]} 0 = 0$.

Démonstration



(i) f est continue en x et $f(x) > 0$, donc il existe deux réels $x^-, x^+ \in [a,b]$, $x^- < x^+$, tels que $f(t) > \dfrac{f(x)}{2}$ pour tout $t \in [x^-, x^+]$ — utiliser la définition de la continuité avec $\varepsilon = \dfrac{\big|f(x)\big|}{2}$.
Soit alors φ l'application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ de valeur $\dfrac{f(x)}{2}$ sur $[x^-, x^+]$ et nulle sinon. Comme f est positive ou nulle, $\varphi \leqslant f$, i.e. $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$. Du coup : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant \int_{[a,b]} \varphi = \frac{f(x)}{2}\,(x^+ - x^-) > 0$ comme voulu.

(ii) est la contraposée de (i). ∎

Définition (Notation $\displaystyle\int_a^b f$) Soit $f \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

Pour tous $\alpha, \beta \in [a,b]$, on pose : $\displaystyle\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int_{[\alpha,\beta]} f & \text{si } \alpha \leqslant \beta \\ \displaystyle -\int_{[\beta,\alpha]} f & \text{si } \beta < \alpha \end{cases}$.

2.5 Extension au cas des fonctions complexes

La notion de fonction continue par morceaux à valeurs complexes est définie exactement comme dans le cas réel et on note $\mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$ l'ensemble des applications continues par morceaux à valeurs complexes définies sur $[a,b]$. On peut montrer qu'une application à valeurs complexes est continue par morceaux si et seulement ses parties réelle et imaginaire le sont.

Définition (Intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes sur un segment)
Soit $f \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{C}\big)$. On appelle *intégrale de f sur $[a,b]$* le nombre complexe :

$$\int_a^b \mathrm{Re}(f) + i\int_a^b \mathrm{Im}(f), \qquad \text{noté } \int_a^b f \text{ ou } \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

✖✖✖ **Attention !** Une intégrale en ce sens ne peut pas être interprétée comme une aire, même éventuellement comptée algébriquement, puisqu'il s'agit d'un nombre complexe.

3 Intégration et dérivation

3.1 Primitive

Définition (Primitive) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application. On dit qu'une application $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une *primitive de f sur I* si F est dérivable sur I de dérivée f.

Exemple La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$ est **une** primitive de $x \longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$, et Arctan est **une** primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème (« Unicité » des primitives) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application. On suppose que f possède une primitive F sur I. Les primitives de f sur I sont alors toutes les applications $F+\lambda$, λ décrivant $\mathbb{K}$.

✖✖✖ **Attention !** Comme le montre ce théorème, il n'existe jamais une seule primitive. Il peut ne pas en exister, mais s'il en existe, il en existe une infinité et elles sont toutes égales à une constante additive près.

Démonstration Soit $\tilde{F} \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \tilde{F} \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I &\iff \tilde{F}' = f \text{ sur } I \iff \tilde{F}' = F' \text{ sur } I \\ &\iff \big(\tilde{F}-F\big)' = 0 \text{ sur } I \iff \tilde{F}-F \text{ est constante sur } I \\ &\iff \exists\ \lambda \in \mathbb{K}/\quad \tilde{F} = F+\lambda \text{ sur } I. \end{aligned}$$

■

3.2 Existence de primitives et théorème fondamental de l'analyse

Exemple Soit f l'application de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(1)=1$ et $\forall x \in [0,2] \setminus \{1\},\quad f(x)=0$.
Alors $f \in \mathcal{CM}\big([0,2],\mathbb{R}\big)$, et pourtant f n'admet pas de primitive sur $[0,2]$.

En effet Raisonnons par l'absurde en supposant que f possède une primitive F sur $[0,2]$. Alors $F'=f$ est nulle sur l'intervalle $[0,1[$, donc F est constante de valeur un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ sur $[0,1[$; de même, $F'=f$ est nulle sur $]1,2]$, donc F est constante de valeur un certain $\mu \in \mathbb{R}$ sur $]1,2]$.
Or F est dérivable, donc continue sur $[0,2]$. Il en découle que $F(1)=\lambda=\mu$ par continuité. Ceci prouve que F est constante sur tout $[0,2]$ et donc que $F'=f$ est nulle sur $[0,2]$, ce qui contredit la définition de f.

Théorème (Existence de primitives pour les fonctions continues) Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

(i) Soit $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par : $\forall x \in I, \quad F(x) = \int_a^x f.$ Alors F est une primitive de f sur I.

(ii) Pour tout $A \in \mathbb{K}$, il existe une et une seule primitive $F_{(a,A)}$ de f sur I telle que $F_{(a,A)}(a) = A$. Elle est définie par :

$$\forall x \in I, \quad F_{(a,A)}(x) = A + \int_a^x f.$$

✖✖✖ **Attention !** En général, sans hypothèse de continuité, pas de primitive, comme l'a montré l'exemple précédent.

Démonstration

(i) Montrons que F est une primitive de f sur I. Pour cela, fixons $x \in I$ et montrons que F est dérivable en x et que $F'(x) = f(x)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x : $\exists\ \alpha > 0/ \quad \forall s \in I, \quad |s - x| \leqslant \alpha \implies \big|f(s) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$
Soit alors $t \in I \setminus \{x\}$ tel que $|t - x| \leqslant \alpha$.

$$\left|\frac{F(t) - F(x)}{t - x} - f(x)\right| = \left|\frac{1}{t - x}\int_x^t \big(f(s) - f(x)\big)\ \mathrm{d}s\right| \qquad \text{car} \quad \int_x^t f(s)\ \mathrm{d}s = F(x) - F(t) \quad \text{et} \quad \int_x^t f(x)\ \mathrm{d}s = f(x)\int_x^t \mathrm{d}s = f(x)(t - x)$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{t - x}\displaystyle\int_x^t \big|f(s) - f(x)\big|\ \mathrm{d}s \leqslant \dfrac{1}{t - x}\displaystyle\int_x^t \varepsilon\ \mathrm{d}s = \varepsilon & \text{si } t > x \\ \dfrac{1}{x - t}\displaystyle\int_t^x \big|f(s) - f(x)\big|\ \mathrm{d}s \leqslant \dfrac{1}{x - t}\displaystyle\int_t^x \varepsilon\ \mathrm{d}s = \varepsilon & \text{si } x > t \end{cases}.$$

Ceci montre que $\lim_{t \to x} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = f(x)$, donc que F est dérivable en x avec $F'(x) = f(x)$ comme voulu.

(ii) **Existence :** Soit $A \in \mathbb{K}$. L'application $F_{(a,A)} = A + F$ est une primitive de f sur I via (i) et de plus $F_{(a,A)}(a) = A + F(a) = A$.

Unicité : Si $\hat{F}$ est une primitive de f sur I telle que $\hat{F}(a) = A$, nous savons que $F_{(a,A)} - \hat{F}$ est constante sur I, et comme $\hat{F}(a) = A = F_{(a,A)}(a)$, que cette constante est nulle ; bref, $\hat{F} = F_{(a,A)}$ sur I. ■

Théorème (Théorème fondamental de l'analyse) Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $a, b \in I$ et F une primitive quelconque de f sur I.

Alors : $\int_a^b f = F(b) - F(a).$ On note $[F]_a^b$ ou $\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}$ cette quantité $F(b) - F(a)$.

✌ ✌ ✌ **Explication** Ce théorème est fondamental parce qu'il établit un lien entre des notions apparemment totalement étrangères : d'un côté, les notions d'aire, d'intégrale ; de l'autre, la notion de primitive, liée à la dérivation.

Démonstration Puisque F est une primitive de f sur I qui vaut $F(a)$ en a, le théorème précédent montre que : $\forall x \in I, \quad F(x) = F(a) + \int_a^x f.$ Ce résultat est en particulier vrai pour $x = b$. ■

Exemple

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^1 x^\alpha\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\alpha + 1}.$ Intégrale très courante, à connaître PAR CŒUR !
- $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \big[\mathrm{Arctan}\big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$
- $\int_0^{2\pi} \sin t\ \mathrm{d}t = \big[-\cos\big]_0^{2\pi} = 0$ et $\int_0^{2\pi} |\sin t|\ \mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin t\ \mathrm{d}t - \int_\pi^{2\pi} \sin t\ \mathrm{d}t = \big[-\cos\big]_0^\pi - \big[-\cos\big]_\pi^{2\pi} = 4.$

Voici un exemple d'utilisation de la formule « $\int_0^1 x^\alpha\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha + 1}$ ». Il ressemble à mille autres exemples. Pour montrer qu'une suite d'intégrales est nulle, on utilise des inégalités sur les fonctions intégrées.

Exemple $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1 + t^2}\ \mathrm{d}t = 0.$

En effet On part de l'inégalité suivante : $\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leqslant \frac{t^n}{1 + t^2} \leqslant t^n.$ Ensuite on intègre cette inégalité de fonctions continues et on utilise la croissance de l'intégrale : $0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1 + t^2}\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n + 1}.$ On conclut enfin à l'aide du théorème des gendarmes.

✖✖✖ **Attention !** Profitons de cet exemple pour prévenir une erreur grave : en général, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t \neq \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$. Vous étudierez ce problème en détail l'an prochain. Mais l'idée est à retenir !

3.3 Intégration par parties

Théorème (Intégration par parties) Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $a, b \in I$. Alors : $$\int_a^b u'v = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Démonstration Parce que u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, $u'v+uv'$ est continue sur I et uv en est une primitive. Le théorème fondamental de l'analyse affirme donc que $\int_a^b (u'v+uv') = \big[uv\big]_a^b$. Or les fonctions $u'v$ et uv' sont elles-mêmes continues sur I, d'où finalement, par linéarité : $\big[uv\big]_a^b = \int_a^b (u'v+uv') = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'$. ■

Exemple La fonction $x \longmapsto x\ln x - x$ est une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^\times$.

En effet Les fonctions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto \ln t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\times$. Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times,\quad \int_1^x \ln t\ \mathrm{d}t = \int_1^x 1\times \ln t\ \mathrm{d}t = \big[t\ln t\big]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \big[t\ln t - t\big]_{t=1}^{t=x} = x\ln x - x + 1.$$

Exemple Les fonctions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto \mathrm{Arctan}\, t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Par conséquent :

$$\int_0^1 \mathrm{Arctan}\, t\ \mathrm{d}t = \int_0^1 1 \times \mathrm{Arctan}\, t\ \mathrm{d}t = \big[t\mathrm{Arctan}\, t\big]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 t \times \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ \big[\ln(1+t^2)\big]_{t=0}^{t=1} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Exemple (Formule de Wallis) $\displaystyle\binom{2n}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}.$

En effet Tout étudiant en prépa a rencontré au moins une fois dans sa carrière la formule de Wallis et les intégrales du même nom. Un grand classique à savoir refaire à tout prix.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\ \mathrm{d}t$. Ces intégrales sont appelées les *intégrales de Wallis*.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Commençons par une petite intégration par parties, les fonctions $t \longmapsto -\cos t$ et $t \longmapsto \sin^{n-1} t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} t \times \sin t\ \mathrm{d}t \ = \ \big[\sin^{n-1} t \times (-\cos t)\big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \ - \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cos t \sin^{n-2} t \times (-\cos t)\ \mathrm{d}t \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t \cos^2 t\ \mathrm{d}t \ = \ (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t(1-\sin^2 t)\ \mathrm{d}t \ = \ (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

  Isolant I_n, nous en déduisons ceci : $I_n = \frac{n-1}{n}\ I_{n-2}$ ♣.

- Or $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\ \mathrm{d}t = \big[-\cos t\big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 1$. Par conséquent, via ♣, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}\ I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2}\ I_{2n-4} = \ldots = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{(2n)(2n-2)\ldots 2}\ I_0 \\ &= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots 2 \times 1}{\big((2n)(2n-2)\ldots 2\big)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

  et
$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\ I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1}\ I_{2n-3} = \ldots = \frac{(2n)(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3}\ I_1 \\ &= \frac{\big((2n)(2n-2)\ldots 2\big)^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\ldots 2\times 1} \times 1 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \times \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

  Il est plus facile de comprendre d'où viennent ces formules en écrivant « … », mais sur une copie, il conviendrait de faire une récurrence. Notons ♠ ces deux formules.

- Or $\sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Intégrant cette inégalité sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, nous obtenons la décroissance de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il est clair par ailleurs que cette suite est strictement positive — on intègre des fonctions continues positives, strictement positives en au moins un point.
Du coup : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{2n+1}{2n+2} \overset{\clubsuit}{=} \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1.$
Le théorème des gendarmes nous fournit alors la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$, qu'on peut aussi écrire $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \times \frac{2}{(2n+1)\pi} = 1$ grâce aux formules ♠. Et hop, un petit coup de racine carrée :
$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n\pi}, \qquad \text{i.e.} \qquad \binom{2n}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}. \qquad \text{C'est fini.}$$

3.4 Changement de variable

Théorème (Changement de variable) Soient $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}(J, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$. On suppose que $\varphi(I) \subseteq J$.

Alors :
$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

✎✎✎ **En pratique** Comment retrouver vite cette horrible formule du changement de variable ? Voici une méthode apparemment pas très rigoureuse, mais cela dit bien pratique.
On part de $x = \varphi(t)$. Alors $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$, donc $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\ \mathrm{d}t$. Du coup $f(x)\ \mathrm{d}x = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$. Après ça on intègre : pendant que t varie de a à b, $x = \varphi(t)$ varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$. « D'où » la formule.
Mise en garde : de tels « calculs » ne doivent JAMAIS figurer sur vos copies — en mathématiques.

Démonstration Comme $f \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, f possède une primitive F sur J. Par ailleurs, puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, $f \circ \varphi \times \varphi'$ est alors continue sur I et $F \circ \varphi$ en est une primitive. Le théorème fondamental de l'analyse affirme donc que $\displaystyle\int_a^b f \circ \varphi \times \varphi' = \big[F \circ \varphi\big]_a^b = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) = \big[F\big]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$ ■

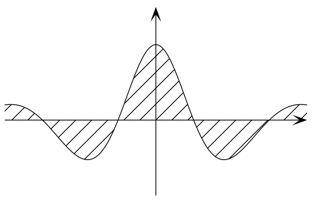
Exemple L'aire d'un demi-disque de rayon 1 est égale à $\frac{\pi}{2}$. Du coup l'aire d'un disque complet de rayon 1 est égale à π.

En effet Le cercle trigonométrique a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$. Son demi-cercle supérieur est donc le graphe de la fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1, 1]$, positive, et l'aire du demi-disque associé est l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$.
La fonction cosinus est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, à valeurs dans $[-1, 1]$, et $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1, 1]$.
$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x \overset{x=\cos t}{=} \int_\pi^0 \sqrt{1-\cos^2 t} \times (-\sin t)\ \mathrm{d}t = \int_\pi^0 |\sin t| \times (-\sin t)\ \mathrm{d}t = -\int_\pi^0 \sin^2 t\ \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^\pi \sin^2 t\ \mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2t)}{2}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

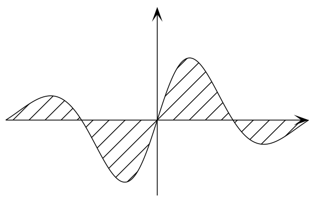
Corollaire (Intégrale et parité/imparité/périodicité)

(i) Soit $f \in \mathcal{C}\big([-a, a], \mathbb{R}\big)$. Alors $\displaystyle\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$ si f est paire, et $\displaystyle\int_{-a}^a f = 0$ si f est impaire.

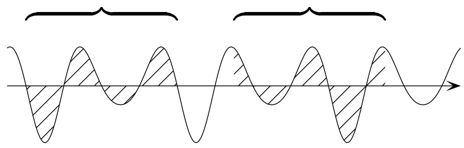
(ii) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodique de période T. Alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.



Cas pair :
l'aire à gauche de 0
est la **même** que
l'aire à droite de 0.



Cas impair :
l'aire à gauche de 0
est l'**opposé** de
l'aire à droite de 0.



Cas périodique :
l'aire sur une période
est toujours la même,
quel que soit le point de départ.

Démonstration

(i) **Cas pair :**
$$\int_{-a}^{a} f \;=\; \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int_0^a f \;\overset{x=-t}{=}\; \int_a^0 f(-t)\times(-1)\,\mathrm{d}t \;+\; \int_0^a f$$
$$=\; \int_0^a f(-t)\,\mathrm{d}t \;+\; \int_0^a f \;\overset{\text{parité}}{=}\; \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \int_0^a f \;=\; 2\int_0^a f.$$

Cas impair : Imiter le cas pair.

(ii)
$$\int_a^{a+T} f \;=\; \int_a^0 f \;+\; \int_0^T f \;+\; \int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x \;\overset{x=t+T}{=}\; \int_0^T f \;+\; \int_a^0 f \;+\; \int_0^a f(t+T)\,\mathrm{d}t$$
$$\overset{T\text{-périodicité}}{=}\; \int_0^T f \;+\; \int_a^0 f \;+\; \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^T f.$$ ■

3.5 Primitives usuelles

Le tableau ci-dessous recense les primitives que vous devez connaître. Pour les apprendre, le mieux consiste à dériver les primitives de la colonne du milieu et à retrouver les fonctions de la colonne de gauche.

Fonction	Primitive	Intervalle de validité
x^α avec $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^\times$ ($\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$)
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^\times$ ou $\mathbb{R}_-^\times$
a^x avec $a > 0, a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{sh}\ x$	$\mathrm{ch}\ x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\ x$	$\mathrm{sh}\ x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}\ x$	$\ln \mathrm{ch}\ x$	$\mathbb{R}$
$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{cotan}\ x = -\dfrac{\cos x}{\sin x}$	$]k\pi, \pi+k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$

Fonction	Primitive	Intervalle de validité
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\|\tan\dfrac{x}{2}\right\|$	$]k\pi, \pi+k\pi[, \quad k\in\mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\|$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[, \quad k\in\mathbb{Z}$
$\text{th}^2 x$	$x-\text{th}\ x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$	$\text{th}\ x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\text{sh}^2 x}$	$\dfrac{1}{\text{th}\ x}$	$\mathbb{R}_+^\times$ ou $\mathbb{R}_-^\times$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$ avec $a>0$	$\dfrac{1}{a}\ \text{Arctan}\ \dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$ avec $a>0$	$\dfrac{1}{2a}\ \ln\left\|\dfrac{a+x}{a-x}\right\|$	$]-\infty,-a[$ ou $]-a,a[$ ou $]a,\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ avec $a>0$	$\text{Arcsin}\ \dfrac{x}{a}$	$]-a,a[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ avec $a>0$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ avec $a>0$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|$	$]-\infty,-a[$ ou $]a,\infty[$

4 Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral) Soient $f\in\mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ et $a,b\in I$.

Alors :
$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k \;+\; \underbrace{\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(b-t)^n\,\mathrm{d}t}_{\text{Reste intégral}}.$$

✌✌✌ **Explication** Cette formule généralise le théorème fondamental de l'analyse, que l'on retrouve pour $n=0$.

Démonstration Fixons I, a et b et raisonnons par récurrence. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété :
$$\forall f\in\mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}),\quad f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k \;+\; \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(b-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

- **Initialisation :** $\mathcal{P}_0$ est l'énoncé du théorème fondamental de l'analyse, déjà démontré.
- **Hérédité :** Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est alors. Soit $f\in\mathcal{C}^{n+2}(I,\mathbb{R})$. Alors $f\in\mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ et donc, via $\mathcal{P}_n$: $\displaystyle f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k \;+\; \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(b-t)^n\,\mathrm{d}t \quad \bigstar.$
  Pour conclure, faisons une petite intégration par parties, ce qui est possible car $f^{(n+1)}$ et $t\longmapsto(b-t)^{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I :
  $$\begin{aligned}\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(b-t)^n\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\times f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\times f^{(n+1)}(t)\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\times f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1} \;+\; \int_a^b \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}\,(b-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
  Il suffit pour conclure d'insérer ce résultat dans $\bigstar$ et c'est terminé. ■

Corollaire **(Inégalité de Taylor-Lagrange)** Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$.

Alors :
$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{(a,b)} \left| f^{(n+1)} \right|,$$

où $\sup\limits_{(a,b)} \left| f^{(n+1)} \right|$ désigne la borne supérieure de l'ensemble des valeurs de f sur le segment $[a,b]$ ou $[b,a]$ d'extrêmités a et b.

Démonstration Tout d'abord, la quantité $\sup\limits_{(a,b)} \left| f^{(n+1)} \right|$ est un réel bien définie car $f^{(n+1)}$ est, par hypothèse, continue sur le segment d'extrêmités a et b. Majorons tout simplement, en supposant d'abord que $a \leqslant b$:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k \right| = \left| \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(b-t)^n\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b \frac{\left|f^{(n+1)}(t)\right|}{n!}\,|b-t|^n\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \sup_{(a,b)} \left| f^{(n+1)} \right| \times \int_a^b \frac{|b-t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t \;=\; \sup_{(a,b)} \left| f^{(n+1)} \right| \times \left[-\frac{|b-t|^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{t=a}^{t=b} \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{(a,b)} \left| f^{(n+1)} \right|.$$

C'est le résultat voulu. Si $b < a$, on raisonne de même, mais il faut remplacer les « $\int_a^b$ » par des « $\int_b^a$ » dans les majorations positives. ■

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} = e^x$, résultat que l'on note aussi : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$.

En effet Soit $x \in \mathbb{R}$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec les points 0 et x. Il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left| e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \right| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{|x|}$. En effet, la fonction $\left| \exp^{(n+1)} \right|$ est majorée par $e^{|x|}$ sur le segment d'extrêmités 0 et x.
Faisant tendre n vers ∞ et utilisant le théorème des gendarmes, nous obtenons le résultat attendu — on rappelle que les factorielles l'emportent sur les puissances.

5 Approximations d'intégrales

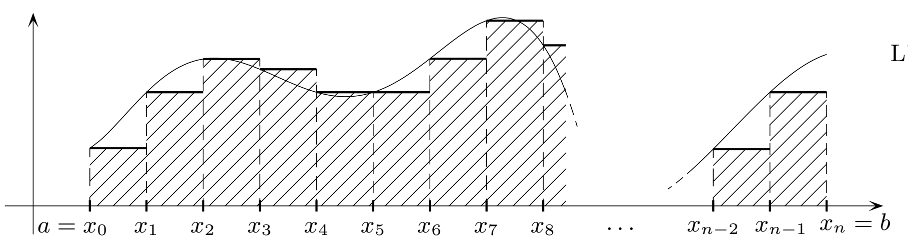
5.1 Sommes de Riemann

Théorème **(Sommes de Riemann)**

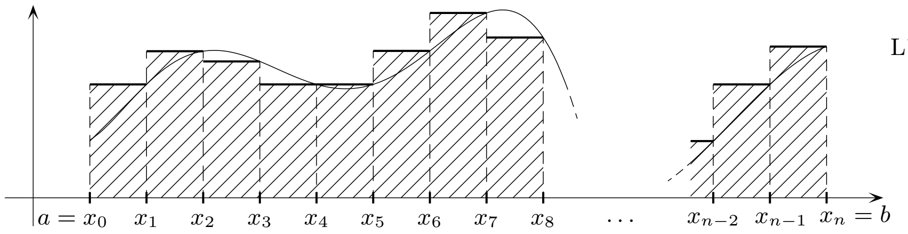
- Soit $f \in \mathcal{C}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$. Alors : $$\int_a^b f = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$
- Si $f \in \mathcal{C}^1\big([a,b], \mathbb{R}\big)$, l'erreur commise dans ces limites est un $O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

✌ ✌ ✌ **Explication**

- En particulier, le théorème affirme l'**existence** des deux limites.
- L'interprétation géométrique de ce théorème est très simple, il suffit d'un petit dessin pour le comprendre et le retenir. On y a noté x_k le point $a + k\,\dfrac{b-a}{n}$, l'entier n étant fixé.



L'aire du domaine hachuré est
$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$



L'aire du domaine hachuré est $\displaystyle \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$.

Démonstration Si $a = b$, le résultat est trivial. Nous pouvons donc supposer $a \neq b$. Nous montrerons seulement la première égalité, vous réfléchirez seuls à la façon dont on peut obtenir la seconde à partir de la première.

- Soit $\varepsilon > 0$. Via le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a, b]$. Par conséquent, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$: $\quad |x - y| \leqslant \alpha \quad \Longrightarrow \quad \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
- Posons $N = \left\lfloor \dfrac{b-a}{\alpha} \right\rfloor + 1$ et donnons-nous $n \geqslant N$. Alors $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \alpha$ par définition de N.

  Introduisons enfin $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Ces réels sont rangés naturellement dans l'ordre suivant : $\quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
- Nous allons montrer l'inégalité : $\displaystyle \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \leqslant \varepsilon$, qui prouvera aussitôt le théorème.

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| = \left|\overbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x}^{\text{Relation de Chasles}} - \sum_{k=0}^{n-1}\overbrace{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}x}^{\int_{x_k}^{x_{k+1}}\mathrm{d}x = (x_{k+1}-x_k) = \frac{b-a}{n}}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \big(f(x) - f(x_k)\big)\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \big|f(x) - f(x_k)\big|\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \times \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

- Que se passe-t-il enfin si $f \in \mathcal{C}^1\big([a, b], \mathbb{R}\big)$? Nous savons alors que $|f'|$ est continue, de sorte que $K = \max\limits_{[a,b]} |f'|$ est un réel bien défini. Via l'inégalité des accroissements finis, f est donc K-lipschitzienne sur $[a, b]$. On peut alors démontrer le résultat précédent plus rapidement sans utiliser le théorème de Heine, et donner au passage une majoration de l'erreur commise. Fixons $n \in \mathbb{N}^\times$ et posons $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \big(f(x) - f(x_k)\big)\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \big|f(x) - f(x_k)\big|\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x - x_k)\,\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} K\left[\frac{(x - x_k)^2}{2}\right]_{x=x_k}^{x=x_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{K(b-a)^2}{2n^2} = \frac{K(b-a)^2}{2n}.$$

Ceci démontre la convergence, mais aussi que : $\displaystyle \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \underset{n\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$. ∎

Exemple $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2$.

En effet $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \big[\ln(1+t)\big]_{t=0}^{t=1} = \ln 2$ par continuité de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $[0, 1]$ (sommes de Riemann).

Exemple $\displaystyle \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{4n}{e}$.

En effet $\displaystyle \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)} = \sqrt[n]{n^n \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)} = n\exp\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$. Or $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \big[(1+t)\ln(1+t) - (1+t)\big]_{t=0}^{t=1} = 2\ln 2 - 1$ par continuité de $x \longmapsto \ln(1+x)$ sur $[0, 1]$ (sommes de Riemann). Du coup : $\displaystyle \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \underset{n\to\infty}{\sim} ne^{2\ln 2 - 1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{4n}{e}$.

5.2 La méthode des trapèzes

Le calcul approché d'une intégrale au moyen des sommes de Riemann est généralement appelé la *méthode des rectangles*. Nous avons montré que l'erreur commise était au plus de l'ordre de $O\left(\frac{1}{n}\right)$, si n est le nombre de termes sommés. Cette majoration de l'erreur n'est pas très bonne, car la suite $\frac{1}{n}$ ne tend pas vers 0 très rapidement lorsque n tend vers ∞. La méthode d'approximation par les sommes de Riemann n'est donc pas pleinement satisfaisante.

Nous allons présenter ici une méthode proche de la précédente, mais de convergence accélérée $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, appelée la *méthode des trapèzes*. Il existe bien d'autres méthodes encore meilleures, mais elles ne figurent pas à notre programme.

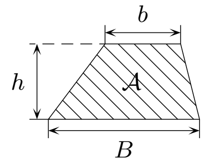
Théorème (Méthode des trapèzes) Soit $f \in \mathcal{C}^2\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

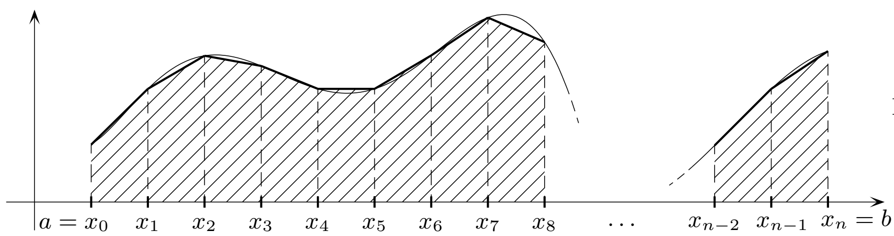
- Alors : $$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right].$$
- De plus, l'erreur commise dans cette limite est un $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Démonstration Ce résultat n'est pas horrible à montrer, mais le programme nous demande de l'admettre. ■

✌ ✌ ✌ **Explication** On remarquera que le terme « $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)$ » est presque le terme que nous donnait la méthode des rectangles, aux bornes près. Mais d'où sort cette formule ? L'idée, c'est qu'au lieu d'approximer f par un plateau sur $[x_k, x_{k+1}]$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on approxime maintenant à l'aide d'une fonction affine. Les rectangles sont ainsi remplacés par des trapèzes. Il n'est pas dur de se convaincre, intuitivement, que l'approximation par des trapèzes est meilleure que l'approximation par des rectangles.

Rappelons pour les étourdis que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule suivante : $\mathcal{A} = \frac{(B+b)\times h}{2}$.





L'aire du domaine hachuré est $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}$.

Mais d'où voit-on surgir l'approximation « $\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right]$ » de $\int_a^b f$? C'est juste un petit calcul :

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} &= \frac{b-a}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{2} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_{k+1})}{2}\right] = \frac{b-a}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{2}\right] \\
&= \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(x_k)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(x_k)}{2} + \frac{f(x_n)}{2}\right] = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right] \\
&= \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right] \qquad \text{Et voilà.}
\end{aligned}$$